37-3

LA TRISEZIONE
DELL'ANGOLO

RAGIONATA ALLA COMUNE INTELLIGENZA

PER COMODO DELLE ARTI

DALL' ARCHITETTO

LUIGI COCCIOLA.



7 1

LA TRISEZIONE
DELL' ANGOLO

RAGIONATA ALLA COMUNE INTELLIGENZA

PER COMODO DELLE ARTI

DALL' ARCHITETTO

LUIGI COCCIOLA

PROFESSORE DEL REAL ISTITUTO DI BELLE ARTI,
DELL' UNICA SCUOLA MILITARE ec. ec.

Judicis Officium est, ut res, ita tempora rerum
Quaerere: quaesito tempore tutus eris.
OVID. TRISTE LIB. I. ELEG. I.

SECONDA EDIZIONE

NAPOLI
TIPOGRAFIA DI GENNARO PALMA
1834.

Digitized by Google

PREFAZIONE

Volendo dare alla luce il presente opuscolo, che contiene la trisezione dell' angolo ragionata alla comune intelligenza per comodo delle arti, prego il mio lettore di non censurare prima di esaminare per qualunque siasi preventiva ragione, e se non altro, Feri, sed audi tamen (*).

Si permetta dunque di profittare de' vantaggi, che ha la semplicissima proprietà geometrica della Iperbole esposta nel seguente 1.° problema (modo primo), la quale generalmente trisega tutti gli archi di angoli costituiti su di una sola corda comune.

» *Il cui carattere si esprime nelle gran-*
» *dezze uguale alla metà della sottesa del*
» *terzo degli archi rispettivi, che vengono*
» *costantemente marcate sulla detta lor co-*
» *mune corda, dalle perpendicolari, che vi*
» *cadono da tutt' i punti della enunciata tri-*
» *segante Iperbole. Quindi giova avvalersi*

(*) Plutar. vit. Temist.

dei loro limitati estremi, in dove si determina la serie delle indicate medie grandezze, per facilmente guidare la contigua situazione di tutti gli altri interposti punti, che tracciar devono la medesima trisegatrice linea; onde si possa mercè la opportuna sintetica assegnazione de' punti, evitare la necessità di dovere ricorrere a delle analitiche equazioni per l'indagine di essi punti, come altresì l'obbligo di dover rimontare alla sublime specie cui essa appartiene per lo scopo proposto.

Ed in fatti risultando la sua dimostrazione attissima alla comune portata, maggiormente facilita tal semplicissima sua costruzione, bastando che sappiasi soltanto alzare una perpendicolare e descrivere un cerchio per felicemente ottenerla quasi nel geometrico rigore, ed anche oso dire nel medesimo suo inerente rigore, quante volte però sia precisamente menata la ben possibile sua nitida disegnazione (per la piccola parte almeno, che consegare deve l' arco del dato angolo), quale pure doverebbesi esigere pel perfetto delineamento delle altre e consimili coniche linee; onde si possa così vantaggiarne l'uso sin nei più triviali mestieri, e maggiormente là dove ne bisogni è d' uopo servirsi delle approssimative grafiche regole, o pur congegnate con altro inesatto meccanico modo. È tanto più utile riesce alle arti tale invenzione in quanto che se una sola volta sia

essa linea esattamente descritta, rimane come un costante trisettore adattabile ad ogni data grandezza di angolo.

Altronde ho creduto dovere qui anche aggiungere altro ritrovato pur di simil conio riguardante il medesimo sunto (2.° *modo*), *la cui ricognizione facile più del precedente par che rendesi percepibile ad ogni mediocre intelletto, nonchè la sua organica costruzione, per essermi attenuto invece all' ingenuo mezzo della permessa trisezione della retta* (pro. IX. X. lib. 6.° prob.) *La quale sia però riconosciuta prima in geometrico rapporto perfettamente uguale alle tre sottese delle parti del trisegato arco, anzi che intrattenersi nella delicatissima costruzione della surriferita trascendente trisegatrice: esibendo questo 2.° altro miglior comodo pei diversi usi delle arti, potendo benanche isolatamente addirsi ad ogni arco di angolo particolarmente proposto. Ciò che si reputa tanto più preferibile, forse perchè agevolato nelle proporzioni della semplicissima specie della retta; tacciar meno dell'altro par che si potesse di meccanismo* (1)

---

(1) *Ben vero che sotto di tal senso anche ogni analitica equazione, idonea di utile applicazione, viene indispensabilmente obbligata ad effettuare la sua precisa e diligentissima costruzione, ancorchè sia quella della semplicissima retta del cerchio, o di una curva qualunque, lo che duopo è per la perfetta esecuzione di forzosamente assoggettarsi alla servibile guida di ottimi arnesi; sarà dunque perciò anche la sua teorica di meccanismo caratterizzata? per soltanto divagarsi nella sua medesima astrazione.*

Poichè le scienze son dirette all'utile; e questo dalle arti ne ripete l'effetto; noto è perciò quanto il genio del secolo si sforza a facilitare gli astrusi lumi per la comune istruzione degli usi pratici, onde poter generalmente spaziare delle portentose investigazioni per aumentare gli agi della società; cosichè sterile giacer suole tale prodigioso frutto qualora ne penuriano i pregi in seno di pochi (1), *perciò le più belle scoverte ancor risplendono come rarissime meteore; ed il cui utile, quali impenetrabili arcani negato viene alla volgare necessità.*

Quindi calcando il fano della verità fui da più tempo restio a promulgare la meschinezza di questi soli due problemi; ma intanto grandemente sollecitato, che all' utile mira della soluzion de' quali minor numero di oppositori abbiano ad incontrare, malgrado tutte le sfavorevoli prevenzioni, cui sogliono perniciosamente andar soggette le male interpetrate novità, le quali aspre durezze non servono se non che ad imporre alla umana mente inaccessibili argini onde vietare di liberamente campeggiare gl'immensi spazii delle cognizioni, ad onta che la pura verità serbasi al tempo sincerarne la sanzione (2).

---

(1) *Tali prospere fondamenta furono primieramente gettate dalle benemerite opere di Monge, Chaptal, e Dupin, ec. ec. ed ora più che mai fioriscono mercè i prodigiosi successi della scuola di* Chimica *applicata alle arti, istituita a Parigi nel* 1819.

(2) *Non però altri suscettibili mezzi tendenti a fluire ul-*

A prescindere da tutto ciò; ansioso mai soddisfare a maggiore istruzione la sicurezza dell' esposto; consigliommi a riprodurre per la stampa la sua pubblica conoscenza, e particolarmente per quei che meccanicamente l'usano, e che gradissero giovarsi di un saggio sin ora riserbato all'alta sfera de' soli suoi cultori; mentre che, ripeto, tral volgo manca per soddisfare ne' consueti bisogni, in quanto che si voglia assolutamente esigere semplice facilità ed esattezza, come appunto a dì nostri anche nelle più frivole cose si desidera.

Il mio voto finalmente è diretto al bene, possa almeno la buona intenzione supplire alla deficienza de' miseri miei talenti. Io spero altresì il generoso compenso della gentilezza di un brevissimo momento speso ad esaminare la verità de' proposti vantaggi, giusta il dovuto sistema che si richiede per le matematiche osservazioni. Confidato per altro nella indulgenza proporzionata alla difficoltà del quesito, mi reco a dovere sinceramente riprotestarmi sempre sommesso ai savj giudizj degli intelligenti.

---

teriori penetrazioni, mai tenta profanare i sacri risultati delle analitiche equazioni.

Google

PRIMO MODO

1. Si descriva la retta A B qualunque, e su di essa il semicerchio A C B *figura* 1. il quale sia per metà diviso dalla retta D C prolungata indiffinitivamente : è chiaro, che tutti gli archi minori del semicerchio descritti sulla detta A B saranno i misuratori di tutti gli angoli, che avranno i loro vertici collocati sulla retta D P indiffinita verso P.

Supponiamo ora che siasi trisegata la retta A B, come pure tutti gli archi descritti su di essa, sino alla semicirconferenza : i punti trisegatori KOE ed LNF, si trovano situati sopra due uguali linee curve similmente poste, che si chiameranno *triseganti*, senza punto imbarazzarsi di esaminare a quale classe di curve appartengano, bastando ora di potere ritrovare il modo di facilmente conseguire la loro descrizione colla più possibile esattezza, lo che si può ingenuamente ottenere coll' esaminare una delle loro proprietà, che si presenta quasi da sè, come si farà vedere.

2. Dai punti E ed O si abbassino le perpendicolari EH, OG sulla corda AB, e si tirino le rette AE AO, è facile vedere che la DK, ch' è la sesta parte di AB, è pur la me-

tà della retta AK, ch' è la terza parte della stessa AB; similmente se DG è la metà di ON, come pur la DH è la metà di EF, perchè DG è uguale ad Oe, che è metà di AO = ON, e la DH è uguale ad ER, ch'è la metà di AE; essendo similmente poste le intermedie corde consimili ad ON, EF sempre parallele alla AB, per essere i laterali archi AE AO uguali ad BF BN.

» Quindi si può conchiudere che in ge-
» nerale se dall' estremo A della corda AB si
» tiri la retta AE la AO, o la AK, oppu-
» re generalmente qualunque retta, che dal-
» l' estremo A vada a terminare alla linea tri-
» segante, e dal punto d' incontro si abbassi
» una perpendicolare sulla retta AB, la di-
» stanza che passa tra il punto D, medio del-
» la AB, ed il piè della perpendicolare, sarà
» sempre uguale alla metà della retta che dal
» punto estremo A si è condotta sino alla *tri-*
» *segante*; così di ogni altra perpendicolare che
» parte da tutt'i punti di essa.

Ed essendo AK il terzo della corda AB, ed AH il quarto della stessa (perchè è equilatero il triangolo AED), ne segue che la HK sarà uguale alla dodicesima della medesima corda. Premesse queste cose è facile descrivere la linea *trisegante* allorchè sarà data la sola corda AB dell'arco di un angolo qualunque APB, giusta la sua teorica.

Costruzione della trisegante.

4. Si faccia dunque la parte AK = al 3. e la AH al 4. della corda AB dell' arco dell' angolo APB. Si elevino sopra l' eccesso HK tante indefinite perpendicolari, che si vogliono, compresi gli estremi punti K ed H, come sono le HE GO ecc: si prenda il punto A per centro e pel raggio il doppio di DH, e descrivasi un arco, che vada a tagliare in E la perpendicolare HE; si prenda sempre il punto A per centro e pel raggio il doppio di DG si descriva un' altro arco, che vada a tagliare in O la perpendicolare GO, e così in seguito. È chiaro che tutt' i punti di tale intersezione, ch' essi archi anderanno a determinare le innalzate perpendicolari si troveranno precisamente sulla linea *trisegante*: i detti punti risulteranno maggiormente approssimati tra loro in ragione della grandezza del numero delle perpendicolari che s'innalzano sulla determinata retta HK, i quali più vicini che saranno tra loro, tanto più perfetto si conseguirà la traccia della trisegante.

Potendosi dunque sempre descrivere la linea *trisegante* con quell' approssimazione che si vuole; ne segue, che sarà ormai facile il dividere un dato angolo qualunque in tre parti uguali con quella esattezza che si richiede nella geometria.

Pratica.

5. Ed in fatti sia dato l' angolo APB e la AB corda del suo arco, si descriva su di essa corda la *trisegante linea* nel divisato modo e con la più possibile precisione; là dove questa linea taglierà l' arco AMB di esso dato angolo, là resterà l' arco diviso in una delle tre uguali parti, ed in conseguenza l' angolo APB ch'esso misura: potendosi inoltre benissimo dividere per metà l' altra sua rimanente maggior parte. Ecco dunque trisegato l' angolo con quella sufficiente esattezza, e quella facile semplicità che desiderar si può per uso delle arti; cosichè una sol volta che si sarà proporzionatamente costituita la detta *trisegante* sopra qualunque retta, potrà questa servire come un costante trisettore, quantunque par che soffra di meccanismo l' operazione di doversi adattare in modo la sua data retta, come corda dell' arco del proposto angolo, percorrendo i punti medii C, e D del trisettore soprapposto alla dividente linea MP dell'angolo APB qualunque, approssimandolo più o meno al vertice sin che esattamente si aggiusti toccando gli estremi della corda i lati del dato angolo: ciò che si potrebbe evitare, qualora si voglia costruire la trisegante per ogni proposto angolo, onde così non tenga di meccanismo.

Dichiarazioni della specie della trisegante linea

6. Si potrebbe finalmente provare con estrema semplicità che la curva EOK è una iperbole (a), ma si è potuto vedere da ciò che precede che questa ricognizione è all' intutto inutile, essendo per se stessa ben chiara, e la sua semplicissima dimostrazione è pur capace

---

(a) Supposto che la curva *trisegante* EOK sia una iperbole, qual si è detta, la quale abbia per vertice i punti K, e B, sarà allora la KB l' asse maggiore, ed L il centro della iperbole. Suppongasi inoltre che A sia un dei fuochi della curva: ciò posto si sa dalle teorie delle sezioni coniche, che se alle rette LK, LH ed LA, si prenda una quarta proporzionale X = a Ly da questa si sottragga il semiasse KL, sarà il raggio vettore EA = a Ly — LK = a Ky (*)

Quindi avendo fatto conoscere che una corda qualunque AE è uguale al doppio dell' ascissa corrispondente DH; si deve dunque accordare questo valore con quello or ora indicato dietro le teorie delle sezioni coniche. Se il foco è in A, sarà LA = a 2/3 della corda AB, essendo AK = ad 1/3 della medesima, come pure LK; laonde la proporzione LK: LH: : LA: Ly, si trasformi nella seguente 1/3: LH: : 2/3: Ly; ma la corda AE è = a Ly — KL, ed è poi KL doppio di KD; adunque se ne ricava che DH; ch'è = a LH — LD, sarà la metà di AE, il cui doppio è pur = a Ly — LK; in fatti LD e 1/6 della corda AB, ed è per costruzione LK = ad 1/3 della stessa, vale a dire il doppio: resta quindi dimostrato che la curva *trisegante* è una iperbole; giacchè la proprietà che tiene questa curva, relativamente ai suoi raggi vettori, si accorda con quella che si è pur ritrovata relativamente ad una corda qualunque, vale a dire di essere doppia dell' ascissa corrispondente.

Sarà l' altro foco nel punto X distante dal punto B un terzo della corda AB; e 'l suo centro in L.

(*) *Sez. Con. Hospital, cor. del* 1. *teo. lib.* 3. *Parigi* 1776.

di ogni ingenuo intelletto; come altresì rendesi facilissima la sua costruzione senza che niun bisogno mai obblighi di conoscere a qual specie di curva appartenga essa *trisegante*; e quindi per tal modo sfuggire delle astruse equazioni, già non adattate alla indicata generalità.

SECONDO MODO

APPARECCHIO.

1.° Si descriva il semicerchio QMT *Fig.* 2.ª oppure si completi l'arco trisegato AONB della *figura* 1.ª verso i punti Q T, e pel centro P di esso arco si delinei il diametro QT parallelo alla corda AB dell'arco descritto, il quale si produca verso q; indi conducansi nei punti trisegant i O ed N del detto arco i proprj raggi PN PO, e del suo angolo i lati PA PB, dal punto O si meni la retta Ol perallela al raggio PN.

Prenozioni.

2.° Essendo trisegato l'angolo APB di esso arco, saranno perciò simili i triangoli APO,OAr ed rOt, per essere l'angolo in P del maggior triangolo APO = all'angolo in A del 2; stante che l'angolo in A di questo 2 triangolo OAr, vien posto nella circonferenza, quindi misura il suo arco ONB doppio dell'arcoAO,che tiene l'angolo al centro P del 1, maggior triangolo APO (pro. XX, lib. 3, teo:), il quale ha pur l'angolo in O di comune all'altro AOr; ed il 3. minor triangolo tOr sarà pur simile ai detti per essere la sua base tr parallela alla base Pl del

maggior triangolo POI, uguale al primo APO, oltre di avere l'angolo in r anche di comune al 2. triangolo : ed essendo isoscile il maggiore per essere costituito dai raggi PA PO, saranno perciò essi tutti benanche isoscili ; ed altresì sono essi in continua proporzione tra loro giusta l' ordinato innesto della comunità dei loro medesimi lati, starà il lato AP del maggior triangolo APO alla sua base AO , come questa, già lato del 2. triangolo OAr, sta alla sua base Or; e finalmente questa, qual lato del 3. minor triangolo rOt, sta alla sua base tr; e per conseguenza di ciò sono i loro lati omologhi pur nella medesima proporzion continua cioè ∺ AP : AO : Or : rt. Inoltre ciascun lato del 4. simile triangolo rPs + l'omologo del suo verticale triangolo rOt, è sempre = all' omologo del lor simile maggior triangolo , APO per essere ambi parte del detto maggiore nel lato omologo OP.

3.° Perlochè mostra di essere la semicorda AD costantemente = al 4 proporzionale tr + la At, = alla base rs del 4. triangolo, e + la sua metà rD, la cui corda AB è per conseguenza = ad rs + sB rA , ciascuna delle due ultime è pur = ad AO corda del 3. dell' arco stesso.

4.° Indi si progredisca la corda ON verso j ed u, e facciansi le prodotte linee Oj Nu, ciascuna = ad ON , sarà tutta la retta ju = alle tre corde AO ON NB; e costituiti i parallelogrammi ArOj, rONm, mNuV mercè le rette jl uh uq parallele al raggio PO PN, lati del si-

mile maggior triangolo OPN della indicata proporzione, le cui rette son pur uguali agli stessi lati di esso triangolo, per essere tra le medesime parallele AV Qq ju; quindi i lati jl, uh di essi simili maggiori triangoli passano pei punti estremi A e B della corda, giusta perchè Ar sB sono uguali alle loro parallele jO Nu. Avremo dunque che la corda AB† la BV è in uno = alle tre corde AO, ON, NB del trisegato arco AONB: ma la BV è pur = alla base tr, 4. proporzionale della indicata progressione, per essere il triangolo BuV perfettamente = al simile tOr, ed è anche parte dei simili ed uguali triangoli posti tra le medesime parallele: laonde saran le tre corde delle parti dell'arco trisegato uguali alla corda del medesimo arco † il 4.° proporzionale tr dei triangoli simili riguardante la trisezione medesima. Perlochè la corda AB è pur sempre = alle due corde dell' arco trisegato Ar SB: più rs uguale ad mB, differenza della stessa corda SB al 4.° proporzionale sm = a tr.

» 5.° *Quindi sarà la intera corda del-*
» *l' arco altresì uguale al triplo del 2.° ter-*
» *mine meno il 4.° proporzionale, onde com-*
» *piere con esso 4.° proporzionale il difet-*
» *to in complesso dell' altra terza corda del*
» *trisegato arco (dato in rapporto della or-*
» *dinata ragione del raggio alla medesima*
» *corda, del 3.° dell' arco stesso).*

*

6.° Premesse tali cose, or fa d'uopo dovere occuparsi sulla ricerca del detto incognito 4.° proporzionale; quindi bisogna primieramente partire là dove questo da se stesso felicemente manifestasi, dico ne' così posti archi di estrema ed opposta grandezza della serie degli angoli fig. 1.ª, ed a prima istanza incominciare dal maggior arco ACB cioè dalla trisezione del semicerchio.

7.° Altronde prima di ciò necessita enunciare la *sottesa* EF dell'arco ECF (1), che viene nel medesimo semicerchio determinato = alle sue stesse semicorde AE, BF, la quale qui rattrovasi eziandio = all' omologo 4.° proporzionale AD, della già nota proporzion continua de' lati di essi triangoli simili (2), do-

(1) Chiameremo *sottesa* soltanto quelle, il cui arco vien determinato dalle proprie semicorde AD, BD, adatate dagli estremi de' rispettivi archi di angoli, a distinzione di quelle di ogni altro arco, diverso da questo così ricavato, le quali altre si chiameranno tutte esclusivamente col solo nome di corde.

(2) Si mostra in tal arco, che ciascuna di esse semicorde marca per tal modo nella circonferenza del proprio arco la corda del terzo dell' arco stesso (ciò che corrisponde al 2.° termine della nota proporzione continua) che ciascuna di esse semicorde contiene; dunque entrambe nell' arco stesso marcano in uno, due del 2.° termine, e nei minori archi, più la differenza del 2.° al 4.° oltre della indicata rispettiva *sottesa*, la quale par che per le medesime sue inerenti affinità di rapporto serbasi in essa il mancante 4.° proporzionale, onde nel complesso delle AE, EF, FB comporre in tutti gli archi della graduazione degli angoli sempre una rettilinea estensione uguale

vendo ciò assolutamente attribuirsi al surriferito lato di essi uguali triangoli equilateri proprj della trisezione, giusta il simile consecutivo rapporto, che negli altri minori archi pur si combina il medesimo lato omologo, sempre qual indicato 4.° minor termine, tostochè per lo menomo degrada il semicerchio. Per cui aggiunta la sottesa EF per dritto alla corda AB di questo maggior arco, cioè del semicerchio (1), si compone una retta uguale alle tre corde di esso trisegato arco, secondo l'esposta teoria.

8.° E parimente anche si presenta nell'arco ADB del più picciolo angolo: perchè essendo l'arco di questo angolo combaciante alla sua stessa corda AB (2), sarà per conseguenza il 3.° di essa corda = alla corda del 3.° del suo medesimo arco; e quindi = al 2.° termine della indicata proporzion continua; e conseguentemente ciò dato in ordine alla immensa grandezza del raggio di questo menomo arco, cadrà il suo 4.° proporzionale =

---

alle tre corde del medesimo arco, ugualmente tripartito (come appunto anche simile con tutta esattezza corrispondesi in ogni grafica grandezza d'arco di qualunque grado di angolo trisegato).

(1) Essendo l'arco del massimo angolo più prossimo al semicerchio, poichè esso compiesi a semicerchio, subito che i lati di esso angolo non più costituiscono angolo alcuno, anzi che posti per dritto come una sola retta costituiscono allora il diametro della semicirconferenza.

(2) Questo arco sarà menomo allorchè è prossimo a combaciarsi colla medesima sua corda, e combacerà subito che i lati del suo angolo si rendono paralleli tra loro, ed in conseguenza allora non più costituiscono angolo alcuno, giusta la indifinita estensione del raggio che ivi aver possa.

a zero incidente nello stesso punto D: e la grandezza del 3.° termine potrà essere graficamente determinata media tra il 2.° AK e zero dal punto marcato in D, onde si abbia una effettiva misura dei termini di essa proporzione continua in rapporto l'immensità del raggio suo maggior termine.

Altronde la rispettiva *sottesa* di questo picciolissimo arco anche si succede in D, imperciocchè è pur uguale a zero, per essere i due archi EdD FbD *Fig.* 1.ª che la determina di contatto in D: laonde nulla avendosi da aggiungere alla comun corda AB per la inesistenza della sua *sottesa*, non che del rispettivo 4° proporzionale, onde componga con un di essi la indicata retta = alle tre corde delle parti del trisegato arco; sarà quindi il 3.° di essa medesima corda = a quella del 3.° del suo stesso configurato arco, perchè, ripeto, sono entrambi combaciati ed insiti alla stessa retta AB.

9.° Ciò posto, bisogna dunque esaminare se in altro diverso da questi indicati estremi archi della lor serie, si riscontri la rispettiva *sottesa* anche uguale al detto 4.° proporzionale, onde si possa solidalmente convalidare la soluzione proposta.

Preliminari osservazioni.

» Si premetta *primieramente* osservare
» che la serie delle *sottese* di questo 2.° mo-
» do, si dispongono per tutta la graduazione

» degli archi di angoli, sempre ordinati den-
» tro il triangolo mistilineo EDF, e tutte pa-
» rallele tra loro, dalla massima EF apparte-
» nente al massimo arco ACB, sino a zero
» in D risguardante il menomo arco ADB.

» *In secondo*. Riscontrandosi la *sottesa* di
» questo menomo arco perfettamente nulla,
» ugualmente che il rispettivo 4.° proporzio-
» nale del medesimo arco, come altresì è pur
» uguale la *sottesa* al suo 4.° proporzionale
» nel massimo arco, cioè nel semicerchio.
» E perchè la *sottesa* si ugaglia al 4.° pro-
» porzionale negli archi estremi della serie
» di angoli, a differenza degli altri termini
» della medesima progressione, i quali tutti
» si uguagliano soltanto nel massimo arco, e
» non mai nel menomo; sarà per conseguenza
» di ciò nell'intero graduante corso delle ordi-
» nate *sottese*, di molto approssimato l'anda-
» mento del suo proporzionale progresso di
» ragione, a quello del detto 4.° proporzio-
» nale; e perciò l'andamento di graduazione
» di esse *sottese* si allontana grandemente da
» quello eziandio, che precede il 3.° termine
» contiguo al 4.°, nonchè più all'in grande
» ordinatamente si scosta dall'andamento de-
» gli altri maggiori termini.

» *Terzo*. Finalmente perchè la ragione
» del progresso di esse *sottese* deriva da quello
» degli archi, in cui dalle lor medesime se-
» micorde vengono le dette *sottese* determina-
» te; e la ragion della graduazione degli ar-

» chi stessi anche subordinatamente nasce dallo
» scambievole correlativo ordine della loro ine-
» rente proporzion continua dei triangoli simili
» proprio della trisezione. Tutto ciò mostra una
» totale analoga e collegata affinità di rappor-
» to, che induce a supporre dover essere la ra-
» gione delle *sottese* uniforme all' andamento
» di quella del detto 4.° proporzionale; come
» altresì corrispondere in tutti gli angoli la
» perfetta similitudine di esso loro omogenio
» rapporto, come si è già dimostrato similmente
» combinarsi nell'arco del maggior angolo, non
» che in quello del menomo (1).

Quindi per tali generali analoghe relazioni vi sarà certamente un incidente tale tra i tanti correlativi scontri, che nel diverso slancio del corso della lor ordinata graduazione aver possa la ragione della *sottesa* e del 2.° termine, uno ve ne sia nel corso della lor particolare progressione, (partendo dallo stato di lor comune uguaglianza, sin all'eguaglianza

(1) E poichè nel semicerchio fig. I. vi si adattano in continuazione tre delle sue semicorde, e nel menomo arco ADB vi se ne adattano due delle medesime; laonde è chiaro che nella intera graduazione degli archi di angoli minora sino al menomo una di esse semicorde: lo che ci avverte che il sensibile scemamento di curvatura che soffrono gli archi a grado che minorano, ordinatamente rimarcarsi nelle sottese, dalle medesime semicorde determinate nei rispettivi archi. Ma è pur di geometrico sito serbato nella corda degli archi le ordinate differenze del 2. al 4. termine della nota progressione (n°. 5.); quindi ciò dà a vedere che per l' intimo lor rapporto di ragione possa in detta sottesa anche di geometrico sito serbarsi il detto mancante 4.° proporzionale qual si è accennato nella nota 2. del n.° 7.

di entrambi i dati nel lor comun termine in D). Di modo che la detta *sottesa* si combini una sol volta uguale alla metà di esso 2.° termine, già corda del 3.° del suo medesimo arco; come benanche geometricamente si dimostra similmente combinarsi il menzionato 4.° proporzionale col proprio 2.° termine.

Obbiezione.

Poichè se le surriferite grandezze in questione della *sottesa* e'l 2.° proporzionale non si combinassero ambo nell' arco stesso, l' una uguale alla metà dell' altra, come testè si è detto, ma che si uguagliassero tali grandezze in diversi archi l' un poco distante dal grado dell' altro per la picciolissima differenza del loro andamento di ragione, che sospettar si possa grado grado avvenire da' comuni estremi della lor serie, diversificandosi insensibilmente verso il medio corso dell'ordinata lor graduazione; sarà però, stante le su addotte ragioni, sempre indispensabilmente effettuato il medesimo su indicato scontro della *sottesa* = alla metà del 2.° termine, e non altrimente; malgrado che sia ancor pendente se ciò avvenir possa nell' arco stesso.

SOLUZIONE

SAGGIO PRIMO

10. Si costituisca dunque l' angolo rettilineo APB, e 'l suo arco AMB fig. 2. di modo che sia la *sottesa* d b combinata uguale alla metà del 2.° termine ON corda del 3.° di esso medesimo arco (1); indi condotte le AO ON NB, e la sua maggior corda AB ed i raggi PO, PN, e la Ol parallela alla PN, e sia il detto angolo per metà diviso dalla retta PM.

Ciò fatto abbassate le rette Nf, Ok perpendicolare al diametro QT posto paralello alla corda AB; e date le rette ek ef, saranno queste uguali e paralleli ai lati del simile triangolo OPN, e sono essi anche le diagonali degli uguali rettangoli eNfP, PkOe: adattata nell'arco la semicorda AD e BD, da B in b, e l'altra da A in d; in oltre se dal punto b si abbassa la bs perpendicolare alla AB, questa cadrà nel centro s del rettangolo ePfN, per essere ab metà di bd per costruzione indotta uguale alla metà di eN, ed uguale a Ds; ed è anche per similitudine uguale alla metà di BV, e tutta questa ultima BV pur uguale alla *sottesa* db metà di ON; per essere i triangoli res BuV perfettamente simili ed eguali.

(1) Ciò sembra accadere nell'arco di 135 gradi.

Ciò dunque sembra dover essere sufficiente per la dimostrazione del quesito; perchè BV è eguale al chiesto 4.° proporzionale tr del medesimo arco.

11. Ma poichè il primo termine sta al 3.° come il 2.° al 4.° della nota proporzion continua riguardo la trisezione; come altresì de' triangoli simili sta NP a Ph, come Ns ad sm: cosichè accade in questa costruzione essere il 1.° termine NP doppio del terzo Ns; sarà perciò Ph uguale ad sB, o ad ON, doppio di sm, pur uguale ad rs, già dimostrato in costruzione perfettamente uguale alla sua *sottesa* db.

Per cui aggiunta la detta sottesa per dritto alla corda AB da B in V, sarà la tutta AV uguale alle tre corde AO ON NB del medesimo trisegato arco.

12.° E maggiormente divien ciò chiaro essere nell' arco stesso, perchè la corda AB di esso arco contiene cinque del 4.° proporzionale rt o rs, per essere, ripeto, tra loro perfettamente uguali i simili triangoli res, rPs ec; quindi son pur cinque delle sottese db ciascuna uguale ad rs (1).

---

(1) Quale appunto enunciammo nella prima edizione sotto il titolo: *Un risultato in due geometriche combinazioni*. Napoli 183*.

SECONDO SAGGIO

DELLA SOLUZIONE.

13.° Come in fatti anche similmente costa nel 4.° incidente, dato in altro diverso grado di arco, minore del precedente, cioè alloraquando la *sottesa* si combina essere uguale alla quarta parte del 2.° termine, corda del 3.° dell'arco (1).

Costruzione.

14.° Supposto il detto angolo APC *Fig.* 3.ª e trisegato il suo arco ABC nei punti G, e H, menati i raggi PG PH, e la corda AC; se dal punto trisegante H viene condotta la retta HQ parallela al raggio PG; si avrà il 4.° proporzionale Da: e se dal medesimo punto H si abbassa la HK perpendicolare al diametro jT, dato parallelo alla corda AC, e dal punto medio o della GH conducesi la retta oK e la oL parallela a PG, e PH; saranno per esse i triangoli PHQ LoK uguali e simili, non che le altre loro porzioni, poste tra le medesime parallele jT AC GH, come altresì la base eN = al detto 4.° termine Da; quindi per l'intersezione de'loro lati PH, oK si costituisce il centro V del rettangolo PoHK, da quali simili centri V ed r risulta la ret-

(1) Ciò sembra accadere nell' arco prossimo a quello dell'angolo retto.

ta rV, che li congiunge anche parallela alla corda AC ec. e prodotta sino in k

Or se dal centro V si mena la retta Vi, parallela a Po, e negli uguali rettangoli otVi, iVkH si conducono le diagonali it ik prodotte sino in g ed h; risultano queste parallele ai lati oL oK, e quindi sarà il triangolo hig anche perfettamente uguale al simile triangolo LoK, ed all' altro PHQ ec; posti tra le medesime parallele; e perciò la base ND sarà pur uguale allo stesso 4.° termine Da; laonde sono le basi Da, DN, Ne, es tutte uguali tra loro.

Esecuzione.

15. Imperciocchè adattata all'arco la semicorda AM da A in E, e da C in F, *vien marcata* la *sottesa* EF del medesimo arco già calcolata uguale al detto 4.° della GH. Or se dal suo estremo punto F si abbassa una perpendicolare, questa passar deve pel punto N, centro del rettangolo otVi, per essere BF in costruzione l' ottava parte di GH, come lo è della sua uguale sa la MN metà del 4.° proporzionale eN = ad ND, o Da dell' arco stesso. (Ciò pare che sarebbe sufficiente a dimostrazione della soluzione del quesito).

16. Ma inoltre essendo to metà di Po, perchè la parallela rV parte dai centri r e V dei loro già noti rettangoli oPKH ec., in conseguenza divide la oP per metà in t, e per la ragione medesima sarà oM pure metà di

ot, giusta perchè la corda AC passa per gli angoli alle basi ND Da del triangolo NiD DHa ec.; i quali punti N, e D sono pur i centri dei minori rettangoli otVi iVkH; per cui il triangolo NVD costa esser = al simile diametralmente opposto NiD. Ed essendo oM il 4.° di oP, sarà oN il 4.° del lato oK, e perciò DH è il 4.° del raggio PH: qual appunto stà il 1.° termine PH al 3.° DH, come il 2.° termine CD al 4.° Da; laonde sarà Da il 4.° di GH; come per costruzione è pur EF il 4.° della medesima GH; quindi EF è perfettamente uguale al 4.° proporzionale Da del medesimo arco (1).

17. E percui la corda dell'arco contiene undici grandezze uguali al 4.° proporzionale Da, come anche della *sottesa* EF, cioè quattro per ciascuna uguale ad As o DC, e tre per la rimanente Ds (2) della corda AC; che sono undici, perlochè aggiunta ad essa corda la EF, ne compie dodici, dico tre di DC, ciascuna uguale alla corda GH del 3.° dell'arco dato.

Parimente si può anche sperimentare in altri diversi gradi d'angoli differenti da questi

(1) Ciò che si è rammentato dovere accadere nell'arco prossimo a quello di 90 gradi per essere il raggio di esso quadrante corda dell'arco AGH = a 2/3 del quadrante, pel triangolo equilatero APH, ma in esso il triangolo isoscile AHG costituisce il maggior suo lato AH, minore del doppio di esso AG. (pro. XX. lib. 1.° teo.) sarà perciò il 2.° termine AG; minore della metà del lato del proposto angolo APC.

(2) Già differenza del 4.° proporzionale al 2.° termine CD.

già esposti, come ad esempio quelli, in cui la nominata *sottesa* può combinarsi uguale a 3/4 della corda del 3.° del suo arco, o pure ad 1/3 o 2/3 ec. e così in tanti altri simili acconci sempre felicemente riusciti, ciò che per brevità qui si tralascia esporre. (1)



(1) A prescindere da tutto ciò sarebbe a mio credere pur utile cosa se altro più semplice metodo si appresti, e meglio adattato alla generalità cui è diretto; basterebbe condurre delle rette nei punti ds bm. fig. 2.a, e dimostrarle soltanto parallele, quale appunto nel surriferito modo già risultate sono per essere parallele le uguale db sm: onde così per sola costruzione riconoscere parallelogrammo il quadrilatero mbds, e quindi la *sottesa* db sempre uguale al 4.° proporzionale sm, che si cerca.

PRATICA APPLICAZIONE

del 2.° *modo.*

20. Prodotta adunque la *sottesa* db fig.ª 2.ª, o di qualunque altro arco di angolo, si congiunga la sua grandezza per dritto alla corda AB da B in V, e si triseghi tutta la composta AV, mercè la trisezione della retta AP arbitrariamente progredita verso Π (*pro. IX. X. Lib.* 6. *proble.*) sarà una di esse parti la chiesta corda del 3.° dell'arco dato, la quale si adatti all'arco stesso dal suo estremo A in O, e da B in N, che sarà tosto trisegato l'arco, e quindi il suo angolo. (1)

Applicazione 2.ª

21.° Se poi piaccia pel miglior comodo de' diversi gradi, o grandezze di figura di marcare sulla semicorda AD la grandezza della *sottesa* db dal punto A verso D, lo che cadrà in t; e trisegata la rimanente sua porzione tD, delle quali parti toltane una verso D da D in r, si avrà che la rimanente

---

(1) Mi è sembrato meglio conveniente non dovere qui confondere il nome al buon senso delle pratiche esecuzioni di queste teoretiche applicazioni, col mal sentito vocabolo di grafico di meccanismo che indistintamente si usan chiamare anche similmente tutte le mere ingegnose operazioni: ma in vece adattare la voce di pratica, come la più propria al suo magistero; ed a conservare la idee de'teorici suoi principii.

parte Ar sarà la chiesta corda del 3.° dell'arco (1).

Applicazione 3.ª

22.° Oppur pei detti punti r ed s estremi delle rimaste surriferite porzioni, conducansi i raggi Pr Ps sin che tocchino la periferia dell'arco; sarà l'arco benanche trisegato nei punti O N, e quindi il suo angolo APB, malgrado così tal sua delicatissima esecuzione.

Applicazione 4.ª

23.° Volendo finalmente trisegare il supplemento di un arco trisegato (2), sarà d'uopo dal punto trisegatore G o H dell'arco AGHC fig.ª 3.ª iscrivere nella sua intera circonferenza il triangolo equilatero GZY. Essendo l'arco GAZ il terzo di essa circonferenza, dal quale tolto l'arco AG 3.° dell'arco AGHC; sarà la rimanente porzione AZ il terzo del suo supplemento AZXC, *perchè da grandezze uguali toltene parti uguali, le rimanenti porzioni son pure ugua-*

(1) Essendo la semicorda AD contenuta del 2.° termine più la semidifferenza di esso al suo 4.° proporzionale; quindi occupatosi il detto 4.° termine db sarà la rimanente porzione uguale a tre semidifferenze: or tolta una di queste, rimane il 4.° proporzionale più la intera differenza: ciò che entrambi compiono il chiesto 2.° termine, corda del 3.° dell'arco dato.

(2) Chiameremo supplemento dell'arco la porzione della circonferenza, che rimane da qualunque arco.

li ; conseguentemente si calcola degli altri due terzi del medesimo cerchio , cioè essere l'arco ZXY uguale agli archi AZ † AG , e l'ultimo terzo YCG pur uguale all'arco GH † l'arco HCY.

Il quale triangolo facilmente può descriversi coll' adattare dall' intermedio punto trisegatore sei volte il raggio intorno alla circonferenza.

Trisegato l'arco, trisegare il suo complemento.

24.° Dall' estremo A del trisegato arco AGHC , si meni il diametro APX, sarà CYX il complemento di esso arco (1) ed XT la sua metà. Or iscritto il triangolo equilatero GZY, il cui lato GY marca il 3.° della intera circonferenza , il quale terzo contiene l'arco GHC = a 2/3 del trisegato arco AGHC ; sarà per conseguenza CY = a 2/3 del suo complemento ; perchè gli altri due uguali terzi GZ , ZY del cerchio debbono contenere gli altri quattro terzi del suo supplemento, contando per tutta la circonferenza sei di ciascuna delle indicate terze parti , cioè per ogni semicirconferenza ACX , tre uguali parti dell'arco dato, e tre simili parti del suo complemento; e conseguentemente il 3.° GCY , ne contiene due delle prime GH , HC, e due delle altre in CY; e

(1) Dirassi complemento di un arco , quello che col trisegato compie l'arco di due angoli retti.

perciò YX è il 3.º del complemento, e TY la sua mettà. (1)

Questo è quanto il debole mio ingegno ha saputo tentare pel possibile miglioramento da sostituire alle grafiche regole necessarie per alcune classi di arte. Mi auguro, che se questo puerile abbozzo torni a lusinghevoli risultamenti, possa nell' avvenire spalancare ampio ed illustre sentiero soddisfacente a tal bramata verità.

---

(1) Volendo finalmente in ciò profittare del comodo delle trigonometriche tavole facilmente si ottengono gli estremi termini dei quattro della indicata proporzione continua cioè, i già noti valori del raggio dP, e del doppio seno da dell' angolo dPb fig. 2.ª del quale esattamente se ne misuri il grado; ciò che corrisponde al quarto proporzionale db: indi ricavasi in ordine di essi estremi le due medie proporzionali; quindi il logaritimo della maggiore di esse medie sarà quello che si cerca, dico il 2.º proporzionale uguale alla corda ON del 3.º dell' arco del proposto angolo. La cui metà eO è pur il seno dell' angolo OPM sesto del medesimo angolo dato.

APPENDICE

RAGIONAMENTO SUL NESSO DELLE DIVERSE COSTRUZIONI ORGANICHE DEI DUE PROBLEMI.

Or fa d' uopo rivolgersi a sviluppare l'innesto delle due organiche costruzioni de' già esposti problemi risguardante il medesimo sunto, e spiegare come isolatamente si costituiscano in diverse figure le loro distinte costruzioni organiche, e particolarmente rischiarire le svariate configurazioni della massa che espone la rispettiva serie delle *sottese*, dico di quella rappresentata nella fig. 1.ª che si rattrova allogata nel segmento di arco ECF, e di quella espressa nella fig. 2.ª che viene disposta nell'aja del triangolo mistilineo EDF. Per mera illusione potrebbe tal bivio a prima impressione apparir un dilemma, e conseguentemente sospendere per qualche istante la verità del quesito.

Dovendo dunque su tal proposito rimontare ai principj cui esse figure così svariatamente derivano; distingueremo perciò in due casi questi differenti incidenti del medesimo problema.

II. Nel primo caso fig. 1.ª là dove, ripeto la serie delle *sottese* sono nel segmento di arco disposte, si avrà in questo a rammentare il già noto distinto principio, che il raggio è co» stante, e variate son le corde degli archi nel-

» l'intero corso di tutta la ordinata graduazio-
» ne degli angoli. E che viceversa nel 2.° caso
» fig. 2.ª si avrà per suo principio che nel me-
» desimo ordinato andamento della graduazione
» degli archi stessi sarà costante la corda, come
» corda comune di tutti gli archi di angoli,
» e variabile il raggio rispettivamente. Oltre
» ciò osservasi essere questo mobile raggio pro-
» digiosamente crescente a grado che minora
» l'arco risultando grandemente enorme verso
» il lor minimo.

Ben diverso dal 1.° caso là dove nella
» stessa intera graduazione degli archi progre-
» disce la mobile corda in minor ragione di
» quella del raggio del 2.° caso, perchè la mas-
» sima delle mobili corde non è mai maggiore
» del doppio del suo costante raggio; e que-
» sta maggiore accade nel massimo arco.

III. Perciò doversi, ripeto, principiare ad ingrandire le lor ragioni propriamente negli opposti estremi gradi degli archi di angoli, cioè nel 1.° caso precisamente accade la massima della ragione nel maggiore arco, e nel modo 2.° coincide la maggiore nel menomo. Ed in conseguenza di tali differenti principj nasce per ciascun caso una diversa progressiva ragion di graduazione di archi della ordinata serie di angoli.

IV. E perchè altresì le sottese vengono in ambo i casi anche determinate nei rispettivi archi delle semicorde dell'arco stesso; ed ordinato il lor graduante corso dagl'indicati differenti prin-

cipj, diretto vien perciò in opposto corso l'ordinamento di ragione rispetto a quella degli archi, cui si succedono l'una contigna all'altra, cioè nel caso 1.° essendo costante il raggio uno sarà la grandezza sferale del graduato arco, e per conseguenza succedono le sottese nel massimo segmento ECF della medesima sferacità del dato arco; e quindi collo stesso degresso di ragione producesi lo slancio delle loro ordinate posizioni: vale a dire succedono le distanze tra loro slanciate sottese a misura che degrada l'arco, tal che vanno minorando essi loro intervalli a misura che ordinatamente minorano le grandezze delle lor contigue sottese, di modo che il maggiore intervallo sarà quello più prossimo alla maggiore sottesa EF, e la semiminima si può considerare in vicinanza tale come raccozzata alla minimissima in C.

V. E viceversa nel 2.° caso essendo la ordinata graduazione degli archi di angoli in prodigiosa ragione, giusta il grande accrescimento del raggio verso de' minori archi; divenendo perciò la detta ragione immensamente enorme nel minimo, in ordine della data costante corda comune (1) percui succedonsi in tal caso gli intervalli delle medesime *sottese* inerenti alla consimile progressiva ragione, dal che per tal modo vengono nella medesima norma slanciate

(1) Per essere il raggio qual maggior termine della detta continua proporzione dei triangoli simili riguardante, la trisezione, e la comune semicorda qual sécondo termine, più la differenza di esso 2.° al 4.° proporzionale.

Digitized by Google

le *sottese* nell'aja del triangolo mistilineo EDF. Le quali tutte essendo descritte sempre dalle costanti proprie semicorde de'loro archi, verranno altresì collocate nel medesimo uniforme indicato rapporto. Sono perciò i dett' intervalli di questo caso pur sempre in crescente spazio tra loro a gradi che minora l'arco; tal che il massimo intervallo sarà quello che si determina prossimo alla minima *sottesa* in D, ed il minimo quello più prossimo alla maggior *sottesa* EF, dico essere l'andamento del progresso di questi intervalli ordinati nell'inversa direzione di quelli del caso 1.° rispetto alla graduazione de' loro archi.

VI. Come infatti dalla più chiara e semplice lor proprietà manifestansi le così opposte lor direzioni, non che il diverso progresso degl' intervalli delle medesime *sottese*: dappoichè nel caso 1.° viene la serie di queste ordinata nel menzionato segmento, per tutta la massima rettilinea estenzione della sua altezza da R in C fig. 1.ª E nel caso 2.° fig. 2.ª sono le medesime ordinate nella massima altezza del detto triangolo da R in D, ripeto esser la differenza dall'altezza del triangolo equilatero EDF a quella del suo arco RC: diversificandosi tali lor rettilinee grandezze in rapporto di alcuni dati termini della seguente lor mededesima proporzione ∺ RC : RE : RD † DC (2).

---

(2) Poichè la surriferita maggior grandezza è = all' altezza RD del triangolo equilatero EDF, e la minore RC a quello del suo arco; quindi ∺ RC : RF : AB — RC (pro. xxxv. lib. 3.° teo.) dico l' intero slancio del minor progres-

VII. Quindi saranno perciò in questa maggior grandezza maggiormente diradati in ordinati spazj gl' intervalli dello stesso complessivo numero delle medesime *sottese*, già tutte parallele tra loro, rispetto a quelle stesse che nell' altro caso sono nel minore spazio RC collocate, anche tra loro parallele.

VIII. Ma essendo che nella serie di essi intervalli debba quello più prossimo alla maggior *sottesa* EF considerarsi di uguale grandezza comune ai diversi ordini dei due casi, perchè essa risguarda all' uguale slancio che dista l'arco del maggiore angolo dal semicerchio (a differenza però della insensibile alterazione, che produrre potesse il diverso progresso di ragione, che differisce il totale svariato slancio delle lor serie nei due enunciati casi).

IX. Partendo adunque dal prncipio di tal quasi costante norma di questo primo intervallo d'ambo i casi, se ad esempio si voglia tra-

---

so, che segna la distanza della menoma sottesa alla massima, sta alla metà della maggior sottesa, come questa sta al doppio di essa maggior sottesa meno il detto 1.° termine, o pure all'intero maggiore slancio DR † la detta maggior sottesa EF.

E volendo prossimamente avvalorare il rapporto di differenza di queste due grandezze, si potrà analizzare il triangolo rettangolo DRF. metà del suddetto triangolo equilatero, essendo RF radi= 1/4 del quadrato della ipotenusa DF, quindi sarà RD rad: 3/4 ; laonde rad : RC sarà il compimento rad: della ipotenusa, =a rad del valore di RF. (*) Ciò che in trigonometrico rapporto si riscontra il valor del seno verso a quello del coseno dell'angnlo di gr. 30=al 6.° della semicirconferenza. Lo che corrisponde la minor grandezza RC essere circa 2/13 parti della maggiore RD.

(*) Pro. xxxxvii. lib. 1.° teo.

smettere questa maggiore estensione RD fig. 2.ª in quella minore RC fig. 1.ª onde rilevare la generale conversione de'loro intervalli, debbe allora indispensabilmente devolversi nella trasmessa minore estensione RC il nuovo lor riordinamento di progresso, dovendo assolutamente il medesimo numero degl'intervalli delle stesse sottese ordinatamente ridursi ciascuna lor graduata grandezza in minore estensione, onde sempre conservare come massimo della loro progressione il costante noto intervallo più prossimo alla maggior *sottesa* EF. Per ciò nel progresso del 2.ª caso si conta il medesimo costante intervallo come il menomo, perchè nella sua maggiore estensione RD vengono essi intervalli indispensabilmente più diradati a seconda la prodigiosa successiva degradazione de' loro archi; ed in conseguenza succedono anch' essi intervalli ordinatamente graduati nell' inversa direzione rispetto a quella del 1.º caso; e per questa maggior ragione cui essi graduandosi diviene altresì massimo l'intervallo più prossimo alla minima *sottesa* in D, di esso 2.º caso.

X. E conseguentemente ne segue da tali così diverse ordinate ragioni di ciascuna serie di essi intervalli dati nella inversa ed opposta lor direzione, il risultamento delle diverse descrizioni di linee tracciate dai così posti rispettivi estremi di esse *sottese* compite nel corso dell'intera graduazione degli angoli: cioè nel caso primo descrivesi l'arco ECF sesto del cerchio, e nel 2.º due di essi uguali archi di contat-

to nel centro D, partendo dagli estremi del 1.° Laonde da tali generali principj viene ad ordinarsi il nesso di ambe le organiche costruzioni ciascuna distinta nella figura della propria costruzione, in cui manifestansi i differenti caratteri dei due indicati casi, e particolarmente là dove diversamente si configurano le rispettive masse delle medesime loro *sottese.*

Pratico riscontro.

XI. Altronde sarà facile poter da questi principj veder in congreto nascere l'innesto delle due distinte figurate costruzioni, invertendo lo sviluppo dell'una nella ricostruzion dell' altra; qualora si voglia permettere di graficamente trasmutare una delle suddette loro più sensibili e manifeste condizioni nella omologa dell' altro; che tosto relativamente vi concorrono tutte le rispettive proprietà a regolarmente rigenerare la nuova organica costruzione del dato proposto caso, in quella dell' altro, cui particolarmente vien trasmigrata la indicata sua manifesta proprietà: cioè tracambiare, ad esempio, la maggior lineale estensione RD fig. 2.ª là dove ordinariamente si spazia la serie delle sottese del caso 2.°, le quali ridotte poi nella minor estensione RC, in cui si spaziano le stesse del caso 1.° fig. 1.ª

XII. E per effetto dunque del trasporto del totale minore slancio RC riprodotto da R in n, si costituisce la grandezza Rn ugnale ad RC del caso 1.°; si dovranno in questo minore spazio benanche raccorciarsi i due ugnali ar-

chi del precedente caso 2.° l'un F d D da E in n, e del pari l' altro da F sino all'istesso punto n, e quindi ricomporsi dalla detta sformazione nuova linea tracciata dalle nuove posizioni degli estremi delle sue *sottese*, la quale vada a congiungersi agl' irremovibili estremi della maggior *sottesa* EF. Ciò che per indispensabile conseguenza debbono essi due archi, per tal modo, invertirsi eziandio nella disegnazione di un altro, uguale ad uno dei primi, locchè esser debbe combaciante all'arco ECF di questo 1.° caso, quali tre appunto costituisce il triangolo equilatero EDF (1).

XIII. Imperciocchè se nuovamente ad epio si supponesse la devoluzione di tal serie nel primiero maggiore slancio RD fig. 2.ª quindi nuovamente obbligate sono a diradarsi le stesse *sottese* ordinatamente verso le minime, onde conservare il pristino maggior costante intervallo prossimo alla maggiore sottesa FE come minimo, ed in conseguenza rendere il massimo in D; per lo che essendo la *sotte-*

(1) Del qual nuovo andamento degl' intervalli di esse *sottese* dovrassi eziandio necessariamente svanire l' angolo curvilineo in D, giusta il massimo degresso delle loro ragioni, in cui obbligate sono le *sottese* a prendere la inversa già indicata direzione, per lo che cadrà la minima *sottesa* quasi raccozzata alla sua contigua, entrambe costituite presso n, punto dell' uniforme congiungimento di esse nuove tracciate curve; e perciò gli estremi delle minime *sottese* non possono più affatto costituire descrizione di alcun angolo, ma bensì degenerarsi ambe le primiere curve immedesimate nella descrizione di sol una circolare, quale appunto si è in esso 1.° caso singolarmente devoluta.

sa in D uguale ad un punto, quindi poco più estesa sarà la sua contigua, e perciò rattrovansi i suoi estremi nella massima distanza dal punto D, rispetto gli altri pur contigui estremi dai loro prossimi; è dunque forza che le congiungenti linee tirate dall' indicato punto D ad ambi gli estremi della sua contigua, queste costituiscono eziandio il più acuto angolo; e così grado grado successivamente riproducendosi tutte le altre *sottese* ordinate nella graduazione del primo stato: si avranno per conseguenza in continuazione di tutti gli altri loro estremi, di nuovo regolarmente tracciate da uno nei due primi ugnali archi a seconda della esposta organica teoria di esso 2.° caso, qual dalla mera figura anche chiaramente si presenta.

XIV. Cosichè ne avviene che nella intera graduazione degli archi di angoli i termini della proporzione continua espressi dai lati omologhi dei triangoli simili del 2.° caso fig. 2.a si rappresentino tutti in EF del caso 1.° fig. 1.a, cioè nello stato di lor comune uguaglianza, che succede nella trisezione del maggior de'loro archi, dalla quale distinguonsi tutti in proporzione tra loro tosto che minora la semicirconferenza, e precisamente vedesi in ciò manifestare il 2.° e'l 4.° termine e percorrere tutta la maggior indicata estensione RD, principiando dall'estremo R sino al punto medio D, in cui avviene la trisezione del menomo arco; perciò gli estremi del 2.° termine di queste

lineali grandezze descrivono in tal suo intero corso la Iperbole EOK, e quegli del 4.° termine tracciano l'arco Ed D ciascuna per ambo le loro bande. Quindi se ad esempio anche le lienali grandezze del 1.° e 3.° termine della medesima lor progressione si vogliano dallo stesso lor principio EF fare per tutti i rispettivi gradi similmente percorrere in tutta la stessa lor dividente RD, e sempre parallele tra loro, si avrà che le tracce degli estremi di esso 3.° termine descrivono una parabola, che principia dal detto comun termine E, e finisce sulla comun corda AB, in un punto proporzionalmente posto tra il punto medio D, e K ec: come pur si avrà dagli estremi del così andante maggior termine, e consimilmente posto, la descrizione della 4.° parte dell' Ellisse per l'asse maggiore e posto parallelo alla AB, che principia dallo stesso comun punto E, e termina tangente alla progredita BA in un punto verso Y lontanissimo dal medio punto D, giusta l'immenso accrescimento del raggio, cui grandemente succede nel menomo arco, ed egualmente dal altro suo estremo: considerate tutte le curve nella medesima comune semiordinata EH, = alla metà del lato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio della data semicirconferenza ACB. fig.ª 1.ª

Laonde gli estremi di queste quattro curve delle sezioni del cono marcano sulla progredita AB le medesime lineali proporzioni calcolate sempre dal punto medio D, come le loro metà

date nel menomo arco, in cui rattrovasi il 4.° termine in D = a zero; e per conseguenza sarà pur il maggior termine marcato immensamente esteso verso Y; le cui ragioni minorano all'ingrandire degli archi fin che nel massimo si riuniscano tutti gli altri estremi delle dette coniche curve nel comun punto E. *Citato nel n.° 8. del 2.° modo.*

XV. Quello poi che più chiaramente somministra sicure indagini idonee a generalmente mostrare il comun rapporto delle diverse ordinate posizioni delle medesime *sottese* generatrici le curve d'ambo i casi, cioè che ciascuna *sottesa*, isolatamente considerata, coincide gli estremi sempre negli stessi punti, cui contemporaneamente tracciano le correlative suindicate curve e corrispondenti nel preciso suo grado di angolo, che di comune ad entrambi i casi riguarda, è appunto la unità di rapporto delle due seguenti proporzioni continue insite in ciascuna delle innestate loro costruzioni organiche fig.ª 1.ª e 2.ª

Essendo che la *semisottesa* da, del proprio arco AMB *fig.ª* 2.ª è costantemente media proporzionale in ordine di aM, al diametro AB—il suo minor termine aM (*pro.* xxxv. lib. 3.° teo.) Mentre che la retta dr perpendicolare alla stessa immobile corda AB, è pur sempre media di altra proporzion continua in ordine della medesima *semisottesa* da, (= a Dr) alla stessa AB — il suo minor termine da, per essere circolari gli archi EdD

FbD ambo di contatto in D, descritti col raggio = alla mettà della medesima AB, ed altresì uguale a quello della 1.ª proporzione; quindi riguardano entrambe allo stesso grado di angolo perchè la media dr della 2.ª proporzione parte dal estremo d della medesima *semisottesa* db della 1.ª proporzione.

XVI. Ma la detta dr è pur = alla parte Da, *dell'intiera estensione RD,* che marca il successivo slancio degli ordinati intervalli delle *sottese* del medesimo *caso* 2.° in cui percorreno tal loro degradazione verso de' menomi archi sino in D; come altresì rapresenta il minor termine aM della 1.ª proporzione anche la parte omologa dell'altra intera *minore estensione RC dello stesso suo caso* 1.° là dove anche percorreno le simili lor degradazioni slanciate verso de'menomi archi sino in M: esprimendo questa medesima *sottesa* db la stessa posizione de' suoi punti estremi marcati in d, ed in b, coincidenti le rispettive curve d'ambo i casi, cui partono da un medesimo grado dell' angolo che le riguarda; la quale individuata *sottesa* sempre proporzionatamente determina le due omologhe dimensioni aD aM de'propri casi diversamente progredite, giusta la rispettiva ragione della stessa serie: derivando tale graduazione, de' loro intervalli a seconda de' proprii surriferiti principii.

XVII. Or se paragonasi la ragion de'minori ai medii termini delle due indicate proporzioni avremo, che nella 2.ª diversifica la ragione del

minor termine Dr al suo medio rd, da quella dell' altro minor termine aM al suo medio ad della 1.ª; perfettamente uniforme alla differenza di ragione che ha la maggiore estensione aD alla *semisottesa* da, rispetto quella che ha la menoma estensione aM alla medesima *semisottesa* (1).

XVIII. E perciò contemporaneamente nascono nell'intiero corso delle *sottese* la ordinata graduazione dei distinti casi diversamente cellerata, in uno per la descrizione degli uguali archi EdD FbD, *del* 2. *caso* non che l'altro per l'uguale ECF *del caso* 1.; e tutti di un medesimo raggio uguale alla metà della costante corda AB, *il quale ad entrambe determina eziandio nei propri archi sempre le rispettive sottese.* Laonde concludesi da ciò, che tutti i rapporti analoghi delle proprietà inerenti alle due costruzioni organiche d'ambo i casi, mostrano di essere in un nesso collegate, non ostante i diversi corsi delle medesime *sottese* da cui regolarmente risultano le loro differenti costru-

(1) Poichè le parti aM aD *fig.* 1.ª sono proporzionale ai loro intieri RC. RD. *fig.* 2.ª, saranno perciò considerati i valori delle differenze di ragione, giusto quali indicati sono nella nota 1.ª *dell' articolo VI.*

La qual cosa risulta nell' arco del massimo angolo, dico nel semicerchio ACB *fig.* 1.ª uguagliato il minor termine RC della 1.ª proporzione al 4.° del diametro AB, e 'l suo 3.° a 3/4 dello stesso. E nella 2.ª si uguaglia il suo 2.° termine dr, al semilato del triangolo equilatero iscritto nel cerchio del detto massimo arco, sempre in ordine della medesima *semisottesa* ad comune alle due collegate proporzioni, rispettivamente al 3.° termine; il quale ad entrambe è sempre = alla costante AB — il suo minore termine.

zioni e precisamente le ragioni degli intervalli delle stesse.

XIV. Imperciocchè se diverse da queste fossero le ordinate *sottese* date in ragion di altre particolari leggi de'loro intervalli non potrebbero gli estremi delle rispettive serie descrivere nei due distinti casi, i detti uguali archi, costituiti qual or sono nel triangolo equilatero EDF *fig.* 1.ª ma risultarne indispensabilmente altre curve analogamente diverse, e similmente poste.

Ecco come al miglior modo del mio vedere ho creduto sviluppare in concreto l' idea dell' accennato bivio, che all' istante illudere potrebbe il filo che lega le svariate costruzioni dei diversi casi, e sincerare con questo general pratico analisi, al più possibile chiaro, la dubbia circostanza che insorgere fanno le loro differenti figure, e che precisamente d'ingannare affetta laddove diversamente formasi la massa della stessa serie delle rispettive *sottese* cui caratterizzano i due esposti problemi, riguardante il medesimo sunto.

Potendosi ciò meglio e più brevemente spiegare per la capacità delle elementari classi, cui mi son proposto, mercè altro più felice conio, che mai genio di rifluir non manca.

Fine.

A01 146171



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig 3.

j



Digitized by Google



Digitized by Google